

7/12/15

Άσκηση 106

(Ο.Σ.Ο) n b είναι πολλαπλασιαστική.

$$b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, b(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \exists \text{ πρώτος } p: p^2 | n \\ (-1)^k, & n = p_1 p_2 \dots p_k \end{cases}$$

Πρόταση

$$b \in \mathcal{M}$$

Απόδειξη

$$\text{Έστω } (a, b) = 1$$

Προφανώς $b \neq 0$, διότι $b(1) = 1 \neq 0$

- Αν $a=1$ ή $b=1$ και τότε

$$b(a \cdot b) = b(1 \cdot b) = b(b) = 1 \cdot b(b) = b(a) b(b)$$

Πρόταση

$$\text{αν } b=1 : b(ab) = b(a)b(b)$$

- Έστω ότι υπάρχει πρώτος $p: p^2 | a \Rightarrow b(a) = 0$
 " " " " $q: q^2 | b \Rightarrow b(b) = 0$

Τότε

$$p^2 | ab \Rightarrow b(ab) = 0$$

$$q^2 | ab \Rightarrow b(ab) = 0$$

Τότε:

$$b(ab) = 0 = 0 \cdot b(b)$$

$$b(ab) = 0 = b(a) \cdot 0$$

- Υποθέτουμε ότι $\nexists$ πρώτος $p: p^2 | a$
 $\nexists$ πρώτος $q: q^2 | b$

Τότε

$$\left. \begin{aligned} a &= p_1 p_2 \dots p_k, \text{ όπου } p_i \neq p_j \\ b &= q_1 q_2 \dots q_r, \forall 1 \leq i \leq k, \forall 1 \leq j \leq r \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$a \cdot b = p_1 p_2 \dots p_k q_1 q_2 \dots q_r$$

n πρώτοι αντιστοιχούν και σε ab

Τότε

$$\mu(ab) = (-1)^{k+r} = (-1)^k \cdot (-1)^r = \mu(a)\mu(b)$$

Αρα

$$b \in m$$

Αρα

$$b \in m \Rightarrow b \in U \Rightarrow \exists b^{-1} \in m$$

Πρόβλημα

Πότε είναι $n \mid b^{-1}$?

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$b^{-1}(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε $b^{-1} = v$

$$\text{Αν } f \in U, \text{ τότε } f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} \text{ και } f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{c \in \mathbb{N} \\ c \neq n}} f(c) f^{-1}(c)$$

$$\bullet \text{ Έστω } n=1. \text{ Τότε: } v(1) = \frac{1}{1(1)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\bullet \text{ Έστω } n > 1 \text{ και } n = p^a, \text{ όπου } p \text{ πρώτος, } a \geq 1$$

• $\forall a=1$ case:

$$\begin{aligned} v(p) &= -\frac{1}{b(1)} \sum_{\substack{c,d=p \\ a < p}} b(c)v(d) = -\frac{1}{b(1)} b(p)v(1) = \\ &= -\frac{1}{1} (-1) \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Erweitern Induktion:

$$v(p^b) = 1, \quad \forall b: 1 \leq b < a$$

• case:

$$v(p^a) = -\frac{1}{b(1)} \sum_{\substack{c,d=p^a \\ a < p^a}} b(c)v(d) =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{b(1)} \left[b(p)v(p^{a-1}) + b(p^2)v(p^{a-2}) + \dots + b(p^{a-1})v(p) + b(p^a)v(1) \right] \\ &= -\frac{1}{1} (-1)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

• also

$$v(p^a) = 1 \quad \forall p: \text{prime} \quad \forall a \geq 1$$

• Es sei $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$: auflösung auflösen von $n \geq 1$

werden

$$n = b^{-1} \in \mathbb{N} \quad \text{case: } v(n) = v(p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}) =$$

$$v(p_1^{a_1}) \dots v(p_k^{a_k}) = 1 \cdot 1 \dots 1$$

• also

$$\forall n \geq 1: v(n) = b^{-1}(n) = 1$$

• Proposition

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{d|n} b(d) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$$

zu zeigen

• $\forall n=1$, τότε:

$$\sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1$$

• $\forall n > 1$, τότε:

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{d|n} \mu(d) = 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \mathbf{1}\left(\frac{n}{d}\right) = \\ &= (\mu * \mathbf{1})(n) = \varepsilon(n) \end{aligned}$$

$$\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \forall n > 1 \end{cases}$$

ήτοι

$$\mu * \mathbf{1} = \varepsilon \Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

Πρόταση

$\forall f \in \mathcal{M}$, τότε $\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = (1 - f(p_1)) \cdots (1 - f(p_k))$ όπου

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} > 1 \text{ και αν } n=1, \text{ τότε: } \sum_{d|1} \mu(d) f(d) =$$

$$= \mu(1) f(1) = 1$$

zu zeigen

$\forall n=1$, τότε:

$$\sum_{d|1} \mu(d) f(d) = \mu(1) f(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Εάν

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \text{ απεικονίσεις ορίζουν που } n > 1$$

1^ο BHMA

Εάν $\nexists f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{M}$, τότε

$$\mu \cdot f \in \mathcal{M}, \text{ όπου } (\mu \cdot f)(n) = \mu(n) \cdot f(n)$$

2° BHMA

Εξαιρέσει $\forall f \in m \Rightarrow F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \in m$$

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(d) \cdot v(n/d) =$$

$$= (f * v)(n) \Rightarrow F = f * v \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{, since } f, v \in m$$

τοτε

$$n \text{ ευρισκόμενα } G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad G(n) = \sum_{d|n} (b \cdot f)(d) =$$

$$= \sum_{d|n} b(d) f(d) \in m$$

3° BHMA

$$G(p^a) = \sum_{d|p^a} b(d) f(d) =$$

$$b(1)f(1) + b(p)f(p) + \cancel{b(p^2)f(p^2)} + \dots + \cancel{b(p^a)f(p^a)} =$$

$$= b(1)f(1) + b(p)f(p) = 1 \cdot 1 + (-1)f(p) = 1 - f(p)$$

Αρα

$$G(p^a) = 1 - f(p)$$

4° BHMA

$$G(n) \stackrel{2^\circ \text{ BHMA}}{=} G(p_1^{a_1}) \dots G(p_k^{a_k}) \stackrel{3^\circ \text{ BHMA}}{=}$$

$$(1 - f(p, 1)) \dots (1 - f(p, a))$$

Παράδειγμα 1°

$$\sum_{d|n} b(d) c(d) = ?$$

Προστίθουμε ότι $c \in m$ και από $\sum_{d|n} b(d) c(d) =$

$$= (1 - \varepsilon(p_1)) \dots (1 - \varepsilon(p_k)) \quad \text{av } n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$$

$$\Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d) \varepsilon(d) = (1-2) \dots (1-2) = \underbrace{(-1) \dots (-1)}_{k \text{ φορές}} = (-1)^k$$

Αν

$$n=1, \text{ τότε } \sum_{d|1} \mu(d) \varepsilon(d) = 1$$

$$\sum_{d|n} \mu(d) \varepsilon(d) = \begin{cases} 1, & \text{av } n=1 \\ (-1)^k, & \text{av } n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} > 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2°

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) \phi(d) &= (1 - \phi(p_1)) \dots (1 - \phi(p_k)) = \\ &= (1 - (1 + p_1)) \dots (1 - (1 + p_k)) = \\ &= (-p_1) \dots (-p_k) = (-1)^k p_1 \dots p_k \end{aligned}$$

Ορισμός (Τύπος αντιστροφής του Möbius)

Έστω $f, g \in \mathcal{M}$, και τότε $\forall n \geq 1$

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) (1) \Leftrightarrow$$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) (2)$$

Οι f και g δεν είναι κατ' ανάγκη ωνυμασιασμένες
ή αντιστροφικές

Απόδειξη

Μήδωση

$$\begin{cases} g = f * v & \text{και από τον ίδιο αντιστρόφως} \\ f = b * g & \text{του Möbius θα έχουμε:} \end{cases}$$

Τότε

$$f \in m \Rightarrow f * v = g \in m$$

$$g \in m \Rightarrow b * g = f \in m$$

Παράδειγμα 1^ο

$$\forall n \geq 3 \quad \sum_{k=1}^n b(k!) = ?$$

Λύση

$$\bullet \text{ Αν } n=1, \text{ τότε } \sum_{k=1}^1 b(k!) = b(1!) = b(1) = 1$$

$$\bullet \text{ Αν } n=2, \text{ τότε } \sum_{k=1}^2 b(k!) = b(1!) + b(2!) = b(1) + b(2) = 0$$

$$\bullet \text{ Αν } n \geq 3.$$

$$\bullet \text{ Για } n=3: \sum_{k=1}^3 b(k!) = b(1!) + b(2!) + b(3!) =$$

$$b(1) + b(2) + b(2 \cdot 3) = 1 + (-1) + (-1)^2 = 1$$

$$\bullet \text{ Για } n=4: \sum_{k=1}^4 b(k!) = b(1!) + b(2!) + b(3!) + b(4!) =$$

$$= 1 + 4!(-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 1$$

$$\bullet \forall n \geq 4 \quad \sum_{k=1}^n b(k!) = b(1!) + b(2!) + b(3!) + b(4!) + \dots$$

$$+ b(n!) \xrightarrow{0} 1$$